الخطايا العشر في رياضيات ما قبل الجامعة

أحمد مرسال



© حقوق النشر الإلكتروني محفوظة ل

www.nashiri.net

© حقوق الملكية الفكرية محفوظة للكاتب

نشر إلكترونيا في أكتوبر 2003

المحتويات

إهداء أول في عام 2002 م

إلى قائد نهضة مصر الحديثة
الرئيس محمد حسني مبارك
أحلم أن يأتي هذا الكتاب
متناغما مع دعوتكم العظيمة
هذا العام لتطوير التعليم
في مصرنا المحروسة كما أحلم
أن يكون خطوة معينة على
طريق تطوير الرياضيات فيها

الإهداء

إلى أبى وأستاذي

محمد توفيق شاهين

المدير السابق لمدرسة الرافعي الثانوية

بطنطا . . .

رعيتني كحرفٍ شاعرٍ صغير

ووجَّهتني كعدد رياضي ...

لك مني كل الحب والشكر,

ابنكم

أحمد إسماعيل مرسال

المقدمة

" الرياضيات هي الملكة المتوجة لجميع العلوم وخادمة الجميع "
حينما أطلق "ديكارت" حكمته تلك , كان يؤكد علي أهمية الرياضيات هذه الأهمية التي تأكدت فيما بعد حينما تفوق " السوفييت" في غزو الفضاء ... وبحث الأمريكيون عن سر هذا التفوق فاكتشفوا أنه يرجع للتأخر الأمريكي في مادة الرياضيات ...
لذلك ارتفع في حينه الشعار الأمريكي : " أمة في خطر " ......
وحينما ننظر اليوم إلى حال الرياضيات في مصرنا الحبيبة فإننا لن نكرر رفع الشعار الأمريكي بل سنرفع شعاراً أقوي وهو : " أمة تنتحر"
ونحن نحمد الله أن يسر لنا إخراج هذا الكتاب الأول " الخطايا العشر في رياضيات ما قبل الجامعة " والذي رأينا أن نضئ من خلاله بعض المناطق المظلمة في رياضيات ما قبل الجامعة ...
وقد يتساءل سائل : لماذا اخترنا الخطايا ولم نختر الأخطاء ؟
والإجابة : لأن الخطأ في المعجم ضد الصواب , وهو ما لم يتعمد من الفعل أما الخِطء أو الخطيئة فهو الذنب أو ما تعمد منه ....
ونحن نري أن كثيراً من هذه الأخطاء التي تناولناها في هذا الكتاب هي خطايا لأنها جاءت مع سبق الإصرار والترصد وإن تم هذا الإصرار وذلك الترصد تحت قائمة طويلة من النوايا الحسنة التي منها علي سبيل المثال لا الحصر : التسهيل علي الطلاب أو تبسيط المناهج..... الخ .
هذا الإصرار أدى إلى ترسيب هذه الأخطاء الخطايا في عقول كل من تربي علي هذه الرياضيات .
ورياضيات ما قبل الجامعة التي تناولها هذا الكتاب بالدراسة والبحث هي تلك التي تناولتها الكتب المدرسية أو الكتب الخارجية الموازية لها سواءٌ أصدرت تلك الكتب الخارجية بتصريح من وزارة التربية والتعليم أو صدرت بدونه .
وقد رأينا إضافة كلمة ما قبل إلى كلمة الجامعة لنؤكد علي أن هذه الرياضيات كانت وما زالت موجودة في ظل تواجد جامعي بالمشاركة في تأليف بعض الكتب ، أو من خلال مباركتها بصمت طويل هذا الصمت الذي يصل إلى حد الإقرار والموافقة والتوقيع بإبهام اليد اليمني علي ما فيها .
وإننا لنتوجه بخالص الشكر لأسرة الرياضيات بمدرسة قويسنا الثانوية للبنات والذين عملوا بها في الفترة من سبتمبر 1997 م وحتى فبراير 2002 م ونتوجه كذلك بالشكر لأسرة توجيه الرياضيات لأنه لولا مناقشاتنا الجميلة لما كان هذا الكتاب .
وقد اعتمدنا علي عدد كبير من مراجع الرياضيات التي رأينا أن نخصص لها بابا تحت عنوان .... المراجع ونقط الإضاءة ,
والله ندعو أن نكون قد وفقنا لكل ما فيه خير ,
والله من وراء القصد .

المؤلف

$+\infty$, $-\infty$
و هل هما حقاً عددان غير معروفان؟

من الخطايا الكبيرة للكتب المدرسية – قبل الجامعية – التعامل مع العددين $+\infty$, $-\infty$ علي أنهما غير معروفين . تعال معي عزيزي القارئ لنري هل ∞ , $-\infty$ معروفان وبدقة أم أنهما غير ذلك

تعرف جميع الكتب خواصا علي هذين العددين كالتالي :-

1- $+\infty$ هو عدد غير حقيقي كبير جدا وأكبر من أي حقيقي

2- $-\infty$ هو عدد غير حقيقي صغير جدا وأصغر من أي عدد حقيقي

3- إذا كان س عددا حقيقيا فإن :-

$$س \pm \infty = \pm \infty$$

$$س \times +\infty = +\infty \quad , \quad س > 0$$

$$س \times +\infty = -\infty \quad , \quad س < 0$$

$$(س)^{\infty} = \begin{cases} \infty & , \quad س > 1 \\ \text{كمية غير معينة} & , \quad س = \pm 1 \\ \text{صفر} & , \quad |س| < 1 \\ \pm\infty & , \quad س < -1 \end{cases}$$

$$(س)^{\infty} = \begin{cases} \text{صفر} & , \quad س \in ح -]-1 , +1[\\ \text{كمية غير معينة} & , \quad س = \pm 1 \\ +\infty & , \quad \text{صفر} \leq س < +1 \\ -\infty & , \quad -1 < س < \text{صفر} \end{cases}$$

$$\frac{س}{\pm\infty} = \text{صفر} \quad \text{لكل} \quad س \in ح$$

وحالات عدم التعيين التي ترتبط بالعـــددين

$$\infty - \infty \; , \; (\pm 1)^{\infty} \; , \; (\infty)^{\text{صفر}} \; , \; \frac{\infty}{\infty} \; , \; \text{صفر}^{\text{صفر}} \; ,$$

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

صفر × ∞ ,

والسؤال الملح الآن هو لماذا هي حالات عدم تعيين ؟

هذا السؤال لن تجد إجابة عنه في معظم الكتب التي تتناول الرياضيات وسوف نبحث في صفحات الكتاب التالية عن هذه الإجابة .

والسؤال الأكثر إلحاحا الآن هو :

بعد التعريفات المحددة السابقة للعددين + ∞

, – ∞ هل يمكن أن ندعي أنهما غير معروفان ؟ !

أسئلة .. أسئلة ولا إجابة !!

$$\frac{صفر}{صفر} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \;, \quad ,$$

رياضيات ما قبل الجامعة تقدم لنا الحالات السابقة علي أنها حالات عدم التعيين .. ثم يترك الأمـــر بعـــد ذلك مبهما غارقا في ظلام مبين يضرب في تيه أسئلة لا نجد إجابة لها مثل :–

س**1** : ما معني التعيين ... وما معني عدم التعيين ... ولماذا هي حالات عدم تعيين ؟

س**2** : هل هناك علاقة بين التعيين والتعريف ؟ وبالتالي بين عدم التعيين وعدم التعريف ؟

س**3** : إذا كانت الحالات الســـابقة حـــالات عـــدم تعيين فما هي باقي الحالات ؟

س**4**:أي من الصور الآتية هي حالة عـــدم تعيين وأيها هي حالة تعيين :

صفر × ∞ , , $(صفر)^{صفر}$, $(صفر)$, $\frac{صفر}{\infty}$, $\frac{\infty}{صفر}$

$(\infty)^{صفر}$, $\infty \times \infty$, صفر × صفر , $(\infty)^{\infty}$, $(\mathbf{1})^{صفر}$, $(\mathbf{1})^{\infty}$

إن كل الكتب قبل الجامعية وربما لا أكون مغاليا إذا قلت أن كل الكتب الجامعية لا تعطيك إجابة شافية لهذه الأسئلة ولا تستطيع تلك الكتب أن تأخذ بيدك إلى طريقة تميز بها حالات التعيين من حالات عدم التعيين إن من بين خطايا هذه الكتب المعلومة غير المكتملة .

للإجابة علي الأسئلة السابقة ولتحديد معني التعيين تعالي أولا معي لنقدم مفهوم العملية الثنائية .

" العملية الثنائية * المعرفة علي مجموعة ما س هي تطبيق مجاله حاصل الضرب الديكارتي س × س ومجاله المقابـــل س "

* : س × س ⟵ س

(أ , ب) ⟵ أ * ب

كمثال نعرف عملية الجمع علي ح كما يلي :–

+ : ح × ح ⟵ ح

(أ , ب) ⟵ أ + ب

مثل **2 + 3 = 5**

∴ عملية الجمع عينت عدداً وحيداً هو **5** للزوج المرتب (**2** , **3**) ومعني التعيين هنا هو أن عمليـــة الجمـــع للعددين **2** , **3** لا يمكن أن تعين عددا آخر لهما غير العدد **5** .

لاحظ كذلك في باقي العمليات الثنائية

مثلا في الضرب $3 \times -7 = -21$

في القسمة $48 \div -6 = -8$

في الطرح $16 - 9 = 7$

في الرفع لقوة $(3)^{-3} = \frac{1}{(3)^3} = \frac{1}{27}$

<u>مما سبق يتضح معني التعيين</u>

أي أن العملية الثنائية تحدد عدداً بعينه لأي زوج مرتب ولا تحدد عددا آخر . . . ولو لاحظنا حـــالات عدم التعيين لوجدنا أننا أمام عددين مرتبطين معا بعملية ثنائية .

$\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فلماذا هي حالات عدم تعيين ؟

ولكي تتضح لنا الإجابة بدقة تعالي معي نحسب النهايات الآتية :

$\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - س}{س^2}$, $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - س}{س}$, $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - س}{5 س}$

بالتعويض المباشر في الدوال الثلاث عن س = 0 نحصل علي

$$د(0) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

لذلك نلجأ للتحليل أو للقسمة بسطا ومقاما على س كالآتي :-

1- $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{س(س - 1)}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{س - 1}{س} = \frac{-1}{0} = -\infty$

2- $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{س(س - 1)}{س} = \lim_{س \to 0} (س - 1) = -1$

3- $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - س}{5 س} = \lim_{س \to 0} \frac{س(س - 1)}{5 س} = \lim_{س \to 0} \frac{س - 1}{5} = \frac{-1}{5}$

من هنا يتضح لنا أن $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ هي حالة عدم تعيين لأنه رغم أن العملية هنا عملية ثنائية (عملية قسمة الصفر على صفر) إلا أنها لم تحدد لنا عدداً وحيداً بعينه مساويا لها و إنمـــا تساوت في النهاية الأولى مع $-\infty$ وفى الثانية مع -1 و في الثالثة مع $\frac{-1}{5}$ ...

أي أن العملية الثنائية في (حالة عدم التعيين) تحدد لنا عدداً حقيقـــياً ما مســـاويا لها.ولا تعين للـــزوج المرتب(أ ، ب)عـــددا وحيـــداً بعينه مرتبطا به

ونتنقل الآن لنقطـــة ثانية هـــي مـــاذا نعـــنى بالتعـــريف ومـــاذا نعـــنى بعدم التعريف ؟

إن الإجـــابـــة عـــلى هـــذا الســـؤال ترتبـــط أيـــضا بمفـــهـــوم القســـمة كعملية ثنائية ..

فنحن نعرف أنه لأي عددين حقيقيين أ ، ب حيث ب $\neq$ صفر يوجد عدد وحيد معين حـــ بحيـــث $\frac{أ}{ب}$ = حـــ

وفى حالة أ $\neq$ صفر ، ب = صفر فإننا نحصل على حالة عدم التعريف لأننا نعلم هنا أن :

$\frac{أ}{صفر}$ = + ∞ ، أ > صفر

$\frac{أ}{صفر}$ = − ∞ ، أ < صفر

وعدم التعريف هنا أن + ∞ عدد كبير جداً وأكبر من أي عدد حقيقي ولكننا لا نعرف قيمته بالضـــبط وكذلك − ∞ عدد صغير جداً وأصغر من أي عدد حقيقي ولكننا لا نعرف قيمته بالضبط

ملاحظة :

نؤكد هنا على ضرورة تغيير المفهوم : " القسمة على الصفر ليس لها معنى " لأن + ∞ ، −∞ لهما معنى ومعنى دقيقٌ....ونفصل في هذا المجال المفهوم .

$\frac{س}{صفر}$ = + ∞ , س $\in$ $ح^+$

$\frac{س}{صفر}$ = − ∞ , س $\in$ $ح^-$

عرفنا فيما سبق معني عدم التعيين ..

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن : لماذا هي حالات عدم تعين ؟

نستطيع أن نحصل بدقة علي الإجابة مـــن مفهـــوم العملية الثـــنائـــية والعمليـــة العكســـية لها ..

أولا : نعـــرف أن صفر × أ = صفر لكل أ $\in$ ح

ومنه $\frac{صفر}{صفر}$ = أ , أ $\in$ ح

" لاحظ هناك أن أ عدد حقيقي ما وليس عددا بعينه "

بالمثل

$\infty \times$ أ $= \pm\infty$, أ ∋ $ح^*$

" من مفهوم ضرب عدد حقيقي لا يساوي الصفر × ∞ "

ومنه أ = $\frac{\pm\infty}{\infty}$, أ ∋ $ح^*$

" من مفهوم القسمة كعملية عكسية للضرب "

بالمثل :

$\infty +$ أ $= \infty$, أ ∋ ح

ومنه $\infty - \infty =$ أ , أ ∋ ح

" من مفهوم الطرح كعملية عكســـية للجمع "

بالمثل :

$\frac{أ}{\infty}$ = صفر , أ ∋ ح

و منـــه

∞ × صفر = أ , أ ∋ ح

لاحظ أن أ في الحالات السابقة ليس عددا بعينه و إنما هو عـــدد حقيقي ما .

بقي أن نجيب معا علي السؤال الهام.. أي الحالات الآتية حالة عدم تعيين وأيها غير ذلك .. ؟؟

صفر × ∞ , صفر × صفر , $\frac{صفر}{\infty}$, $\frac{\infty}{صفر}$

(صفر)^{صفر} , $(\infty)^{صفر}$, $\infty \times \infty$, $(\infty)^{\infty}$, $(1)^{صفر}$, $(1)^{\infty}$

سوف نستخدم الحالات السابقة لعدم التعيين لبحث هل الحالة التي بين أيدينا حالة تعيين أم حالة عدم تعيين .

مع مراعاة ما يلي :-

أ- حالة التعيين المعطاة ⟺ حالة تعيين جـــديدة

ب- عدم التعيين المعطاة ⟺ حالة عدم تعيين جديدة

جـ- تذكر أن

أ = ب ⟺ لو أ = لو ب , أ ، ب > 0

ص = أ ^{س} ⟺ لو$_{أ}$ ص = س , أ ∋ $ح^+$ - {1}

لو ∞ = ∞ , لو صفر$^{+}$ = − ∞

..............مثال**1** ....

لبحث هل $\frac{\text{صفر}}{\infty}$ حالة عدم تعيين أم لا

بفرض $\frac{\text{صفر}}{\infty}$ = جـ ⟺ لو $\frac{\text{صفر}}{\infty}$ = لو جـ

⟺ لو صفر − لو ∞ = لو جـ

⟺ − ∞ − ∞ = لو جـ

⟺ لو جـ = − ∞

جـ = صفر

من ذلك $\frac{\text{صفر}}{\infty}$ حالة تعيين

..............مثال**2** ....

لبحث هل صفر × ∞ حالة تعيين أم لا

بفرض صفر × ∞= جـ ⟺ لو صفر × ∞ = لو جـ

⟺ لو صفر + لو ∞ = لو جـ

⟺ − ∞ + ∞ = لو جـ

لو جـ = ∞ − ∞

وحيث أن ∞ − ∞ حالة عدم تعيين

∴ صفر × ∞ حالة عدم تعيين

..............مثال**3** ....

لبحث هل (صفر)$^{\infty}$ حالة تعيين أم حالة عدم تعيين بفرض :

(صفر)$^{\infty}$ = جـ ⟺ لو (صفر)$^{\infty}$ = لو جـ

⟺ ∞ لو صفر = لو جـ

∞ × − ∞ = لو جـ

− ∞ = لو جـ

لو صفر = لو جـ

جـ = صفر

(صفر)$^{\infty}$ = صفر

ملاحظة :

$\infty \times \infty = \infty$ يمكن بنفس الطريقة السابقة إثبات ذلك .

مما سبق نكون قد توصلنا معا إلى معالجة جيدة تكفل لنا الحكم علي الحالة هل هي حالة تعـيين أم حالـة عدم تعيين

وعموما باستخدام نفس الطريقة يمكننا التأكد من أن

أولا : صفر + صفر = صفر ، صفر − صفر = صفر

صفر × صفر = صفر

$\frac{\text{صفر}}{\infty}$ = صفر

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = حالة عدم تعيين

(صفر) $^{\text{صفر}}$ = حالة عدم تعيين

ثانيا : صفر × ∞ = حالة عدم تعيين

صفر + ∞ = ∞

صفر − ∞ = − ∞

∞ − صفر = ∞ ، $\frac{\text{صفر}}{\infty}$ = صفر

$\frac{\infty}{\text{صفر}}$ = ∞

(صفر) $^{\infty}$ = صفر

$(\infty)^{\text{صفر}}$ = حالة عدم تعيين

ثالثا : $\infty + \infty = \infty$

$\infty \times \infty = \infty$

$(\infty)^{\infty} = \infty$

$\infty - \infty$ = حالة عدم تعيين

$\frac{\infty}{\infty}$ = حالة عدم تعيين

رابعا : $(1)^{\text{صفر}} = 1$ ، $(1)^{\infty}$ = حالة عدم تعيين

لإثبات أولا في الحالة الرابعة

نفرض $1^{\text{صفر}}$ = جـ ⟺ صفر لو 1 = لو جـ

⟺ صفر × صفر = لو جـ

⟺ لو جـ = لو 1

جـ = 1

ولإثبات ثانيا :

بوضع 1^{∞} = جـ $\Longleftrightarrow$ **∞ لو 1 = لو جـ**

$\Longleftrightarrow$ **∞ × صفر = لو جـ**

∞ × صفر حالة عدم تعيين

1^{∞} = حالة عدم تعيين

من ذلك تتحدد لنا حالات عدم التعيين وهي سبعة فقط :

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$, ∞ × صفر , ∞ − ∞ , $(\infty)^{\text{صفر}}$,

$(\text{صفر})^{\text{صفر}}$, 1^{∞}

******

سألني زميل بعد أن قرأ ما سبق : ما فائدة هذا بالنسبة لي ؟

فأهديته هذه المسائل في النهايات وطلبت منه فقط تحديد هل النهاية

هي عدد بعينه أم هي حالة عدم تعيين تستحق الدراسة ؟

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$, $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{لوس}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$, $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{لوس}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\lim_{\text{س} \to 0} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لو س})$, $\lim_{\text{س} \to \infty} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لو س})$

$\lim_{\text{س} \to 0} (\text{س})^{\text{س}}$, $\lim_{\text{س} \to \infty} (\text{س})^{\text{س}}$, $\lim_{\text{س} \to 0} (\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{لوس}}$

الضرب الاتجاهي
وظهور ع المفاجئ !!

وأنا أقدم مفهوم الضرب الاتجاهي لمتجهين في الصف الثالث الثانوي وعندما وصلت للنقطة :-

إذا كان : أ = أ$_1$ س + أ$_2$ ص

, ب = ب$_1$ س + ب$_2$ ص

فإن :

أ × ب = (أ$_1$ب$_2$ − أ$_2$ ب$_1$) ع

أدى ظهور ع المفاجئ علي السبورة إلى حيرة إحدى الطّالبات ودارت بيننا المناقشة التالية :-

س(الطالبة) : ما هو س ؟

جـ (المدرس) : س = (1 , 0) متجه الوحدة في اتجاه محوَر السّينات

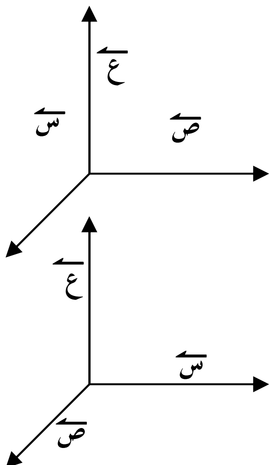
س : وما هو ص ؟

جـ : ص = (0 , 1) متجه الوحدة في اتجاه محوَر الصادات

س : إذن ما هو ع ؟

جـ : هنا أسقط في يدي وفتشت في ذاكرتي عن إجابة صحيحة تسعفني من خلال ما أعددته من كتاب الميكانيكا للصف الثالث الثانوي فلم أجد غير إجابة ملفقة مشوهة قدمها الكتاب وانطلقت أقول للطالبة ع هو متجه وحدة عمودي علي المستوي الّذي يضم المتجهين س , ص

س : " هزت الطالب رأسها غير موافقة هذه الهزة التي أشعرتني أنني أدخل في حلقها شيئا لا تقدر علي بلعه " ثم قالت : إذا كان ع متجه كما قلت يا أستاذي فبالتأكيد أن له إحداثيات مثلما انه لـ س , ص إحداثيات فما هي ؟



جـ : وجدتني أرسم لها هذا الرسم الجانبي ثم امسك بأصابع يدي مجسما لها شكل البريمة اليمينة ومحاولا البحث لها عن إجابة

س : " خرجت الطالبة علي السبورة معترضة ثم رسمت لي هذا الرسم الجانبي بتعديل وضعي س , ص "

قائلة : ولماذا لا يكون الرسم هكذا

جـ : حاولت أن أوضح لها أنه اتفاق علمي عالمي مثل استخدامنا للرمز لو أو للرمز جتا .... أو ....

ووجدتني أصمت لأنهي المناقشة لأنني أدركت أن الطالبة صدقت وكذب الكتاب المدرسي وأن الموضوع برمته يحتاج إلى خسف ونسف ثم إعادة تقديمه علي أسسه الرياضية السليمة .

والأسس الرياضية السليمة تستند علي مفهوم متجهات الوحدة س , ص ع في فراغ ثلاثي البعد :-

س = (1 , 0 , 0)

, ص = (0 , 1 , 0)

ع = (0 , 0 , 1)

كما يعتمد هذا الأساس الرياضي علي مفهوم الضرب الإتجاهي باستخدام المحدد

س × ص =

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

هنا ومن مفكوك المحدد سنجد الإجابة الصحيحة دون لجوء لحشر المعلومات حشرا في الرؤوس أو تلقينها تلقينا خاطئا يتعارض مع ما سيدرسه الطالب في الجامعة .

قد يقول قائل : لماذا نقدم للطالب المتجهات في الفراغ ثلاثي البعد ؟

والإجابة لأن الطالب يدرس في نفس العام الهندسة في الفراغ ثلاثي البعد

وقد يقول آخر : إن الطالب وهو يدرس الضرب الإتجاهي

يكون غير عارف بكيفية التعامل مع المحددات ؟

والإجابة إن فك المحدد الثلاثي مقرر علي الطالب في نفس العام فماذا لو قدمنا دراسة فك المحدد علي الأقل علي دراسة الضرب الاتجاهي ؟

إننا باستخدامنا للمحددات في حالة

أ = ($أ_1$, $أ_2$, 0) , ب = ($ب_1$, $ب_2$, 0)

سنجد أن :

أ × ب =

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ أ_1 & أ_2 & 0 \\ ب_1 & ب_2 & 0 \end{vmatrix} = (أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1) ع$$

وبالتالي سنجد مبررا للضرب وكيف تم وسنجد مبررا لظهور ع وسنجد مبررا لهذه القاعدة التي نستخدمها ونطلق عليها قاعدة البريمة اليمنى والشكل المجاور الذي عدلته الطالبة .

التغير الطردي والتغير العكسي

و م ∈ ح !

طوال تاريخيا الرياضي في المرحلة الثانوية والكتاب المدرسي وتابعته الكتب الخارجية تعلمنا أنه إذا كانت قيمة ص تتغير طرديا بتغير س فإن :–

ص = م س ، م ∈ ح

بينما إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س فإن :–

ص = $\frac{م}{س}$ ، م ∈ ح

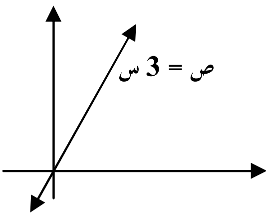
كان وما زال كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي يعلمنا ذلك إلا, أننا فوجئنا منذ عــامين بتعليمــات عليا تعدل المفهوم إلى م ∈ ح$^{+}$ فقط , رغم أن المادة العلمية مستمرة حتى ساعة تاريخه في يناير **2002** م بالكتاب المدرسي و(م) بها مازالت مُصِرّة علي انتمائها لـــ (ح) تري أي المفهومين أدق؟ وهل نكتفي بتعليمات الكتــاب المطبوعة أم بالتعليمات العليا؟ أم أن كلا المفهومين خطيئة من بين خطايا رياضياتنا التي تحتاج إلى تصويب ؟!!

إن التغير الطردي والتغير العكسي يرتبطان ارتباطا جيدا بمفهوم التزايد والتناقص للدالة .

التزايد والتغير الطردي

إذا كانت ص = 3 س فإننا يمكن أن نحصل علي قيم س , ص كما بالجدول

س	3	2	1
ص	9	6	3



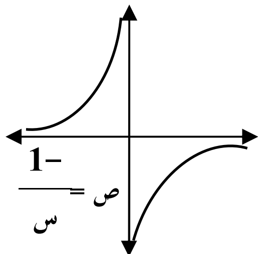
يلاحظ أن س , ص تتزايدان معا في نفس الاتجاه وتتناقصان معا في عكس الاتجاه

هنا نقول أن س تتغير طرديا بتغير ص

أيضا إذا كانت ص = $\frac{1-}{س}$ فإننا نحصل بالتعويض علي بعض القيم كما بالجدول

س	3	2	1	1–	2–	3–
ص			1–	1		

$\frac{1-}{3}$ $\frac{1-}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$



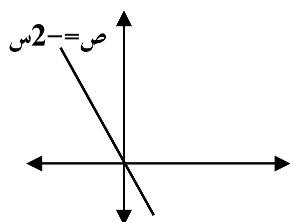
نلاحظ هنا أيضا أن س , ص تتزايدان معا في نفس الاتجاه وتتناقصان معا في عكس الاتجاه .

هنا نقول أيضا أن س تتغير طرديا بتغير ص

مما سبق تكون س في تغير طردي مع ص في حالتين :–

ص = م س ، م ∋ $ح^+$

أو ص = $\frac{-م}{س}$ ، م ∋ $ح^+$



التناقص والتغير العكسي

بالمثل من خلال دراستنا

للدالة ص = −2 س

س	2	1	0
ص	−4	−2	0

نلاحظ أنه مع تزايد قيم س فإن قيم ص تتناقص

وإذا عكسنا الاتجاه فإنه مع تناقص قيم س فإن ص تتزايد هنا نقول أن ص تتغير عكسيا بتغير س .

وأيضا من خلال دراستنا للدالة ص = $\frac{1}{س}$

س	3	2	1	−1	−2	−3
ص	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	−1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$

نلاحظ نفس الملاحظة السابقة

مما سبق ومن خلال الدالتين ص = −2 س ، ص = $\frac{1}{س}$

يمكننا أن نقرر ما يلي :− تكون ص متغيرة عكسيا بتغير س إذا تحقق ما يلي :

ص = − م س ، م ∋ $ح^+$

أو ص = $\frac{م}{س}$ ، م ∋ $ح^+$

مثال تطبيقي (1)

من بيانات الجدول الآتي :−

س	−2	−3	−4
ص	$\frac{1-}{2}$	$\frac{1-}{3}$	$\frac{1-}{4}$

حدد نوع التغير (طرديا أو عكسيا) بين س ، ص ثم أوجد العلاقة التي تربط بينهما والتي استنتجنا منها تلك القيم

الحل : واضح أنه مع تزايد قيم س فإن قيم ص تتناقص إذن التغير عكسي .. نفرض انه

إما ص = − م س ، م ∋ $ح^+$ | أو ص = $\frac{م}{س}$ م ∋ $ح^+$

بالتعويض بإحدى القيم | بالتعويض بإحدى القيم

$\frac{1-}{4}$ = $\frac{م}{4-}$

= − م (−4) =

م = $\frac{1-}{16}$ م = 1

بالتعويض بقيمة أخرى   بالتعويض بقيمة أخرى

= − م (−2) $\frac{1-}{2}$ = $\frac{م}{3-}$ $\frac{1-}{3}$

م =   م = $\frac{1-}{4}$ = 1

الإجابة في الحالتين مرفوضة   وهذه هي العلاقة الصحيحة

إما لأن م سالبة   ص = $\frac{1}{س}$

أو لأن م ليست ثابتة بل تغيرت

مثال تطبيقي (2)

من بيانات الجدول الآتي :−

س	4	1	−3
ص	24	6	−18

حدد نوع التغير (طردي أم عكسي) بين س , ص ثم أوجد العلاقة التي تربط بينهما والتي استنتجنا منها هذه القيم .

واضح من بيانات الجدول أن الارتباط بينهما طردي لذلك نفرض أنه :

إما	أو
ص = م س , م ∍ ح⁺	ص = $\frac{م}{س}$, م ∍ ح⁺
بالتعويض بإحدى القيم	بالتعويض بإحدى القيم
− 18 = − 3 م	− 38 = $\frac{م}{3-}$
م = 6	م = − 54
بالتعويض بقيمة أخرى	أيضا عند التعويض بقيمة أخرى
6 = 1 م	6 = $\frac{م}{1}$
م = 6	م = − 6
العلاقة صحيحة وهي	العلاقة غير صحيحة
ص = 6 س	إما لأن م سالبة
	أو لأن م غير ثابتة

مثال تطبيقي (3)

$\frac{17 س − 2 ص}{4 س − ص}$ $\frac{3}{1}$

إذا كان = لجميع قيم س , ص

اثبت أن :

س يتناسب مع ص وحدد نوع التناسب

الحل

17 س − 2 ص = 12 س − 3 ص

5 س = − ص

س = $\frac{-1}{5}$ ص

س = − م ص , م ∈ ح$^{+}$

س تتناسب عكسيا مع ص

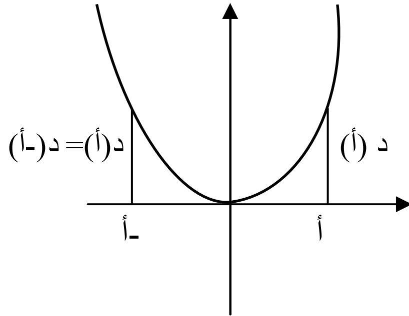
بحث زوجية أو فردية دالة
حينما يغرق بين قيمة الدالة وبحث التماثل

أولا : مفهوم الزوجية للدالة بالمقارنة بين قيمتين

تكون الدالة د (س) زوجية إذا كان :-

لكل أ , – أ ∋ ف [حيث ف مجال الدالة] يتحقق أن

د (– أ) = د (أ)



مثال1 :

للدالة د (س) = $س^2$

مجال الدالة = ح

إذا كان أ ∋ ح فإن – أ ∋ ح

د (أ) = $أ^2$

د (– أ) = $(– أ)^2$ = $أ^2$

∵ د(– أ) = د (أ)

∴ الدالة زوجية

ملاحظة هامة :

1– يجب أن نتأكد أن أ , – أ ينتميان إلى مجال الدالة أولا

2– إذا كان (أ , د (أ)) ∋ بيـــان الدالة الزوجيـــــة

فإن (– أ , د (أ)) ∋ بيان الدالة الزوجـــيـــة أيضا

ثانيا : مفهوم الزوجية للدالة باستخدام التماثل

1– الدالة الزوجية تكون متماثلة حول محور الصادات

2– تكون الدالة د (س) متماثلة حول محور الصادات إذا لم تتغير معادلة المنحني عندما نستبدل (س) بـــ (– س)

في مثال **1**

د (س) = $س^2$

باستبدال س بـــ – س

ص = $(– س)^2$

ص = س^2

منحني الدالة لم يتغير

الدالة زوجية

ثالثا : مفهوم الفردية للدالة بالمقارنة بين قيمتين

تكون الدالة د (س) فـــردية إذا تحقق أن

لكل أ , – أ ∋ ف [حيث ف مجال الدالة]

يتحقق أن :–

د (– أ) = – د (أ)

مثال (2)

للدالة

د (س) = س^3

مجال الدالة = ح

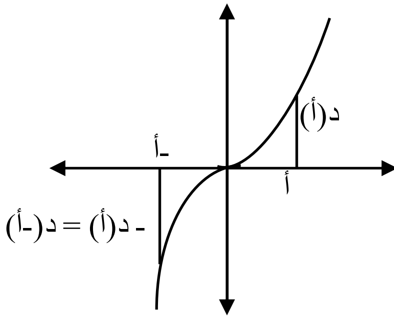
إذا كان أ ∋ ح فإن – أ ∋ ح

د(أ) = أ ^{3}

د (– أ) = (– أ)^3 = – أ^3

∵د (– أ) = – د (أ)

∴الدالة فردية



ملاحظة هامة :

1– يجب أن نتأكد أن أ , – أ ينتميان إلى مجال الدالة أولا

2– إذا كان (أ , د (أ)) ∋ بيان الدالة الفردية

فإن (– أ , – د (أ)) ∋ بيـــان الدالة الفردية أيضا

رابعا : مفهوم الفردية للدالة باستخدام التماثل :

1– الدالة الفردية تكون متماثلة حول نقطة الأصل

2– تكون الدالة د (س) متماثلة حـــول نقطة الأصل إذا لم تتغير معادلة المنحني باستبدال (س) بـــ (– س) , (ص) بـــ (– ص)

في مثال (2)

باستبدال (س) بـــ (– س) , (ص) بـــ (– ص)

ص = س^3

(– ص) = (– س)^3

– ص = – س^3

ص = س^3

∵منحني الدالة لم يتغير ∴الدالة فردية

هذه المقدمة في بحث الزوجية أو الفردية من عدمه كان لابد منها ونحن نبحث في الخطأ الذي يرتكبه أحد الكتب الموازية للكتاب المدرسي والذي يعده البعض مرجعا للطالب والمعلم معا بل ومرجعا في عملية التقــويم إذا عالج الطالب مسألة معطاة له بنفس الأسلوب .

ومـــرجع الخطأ هو أن هنـــاك خلطا يحـــدث بين المعالجة بمقارنة قيمتي د (س) , د (– س)

بينما يلجأ الكتاب الخارجي الموازي إلى التماثل بإيجـــاد د (– س) باســـتبدال س بــــــ – س [وهـــذا الأسلوب لا يصلح إلا لبحث الزوجية فقط بينما يستخدمه الكتاب في معالجة الزوجية والفردية]

وبين المعالجة بالمقارنة والمعالجة بالتماثل يحدث الخلط إذ أنه :

أ– عند استبدال س بــ – س يتغير بالضرورة مجال الدالة بينما عند إيجاد – د (س) لا يتغير مجالها .

ب– كذلك عند التعامل مع المعالجة بالمقارنة فإننا نجد أن د (س) , د (– س) هما قيمتين للدالة نفسها .

سوف نحاول في الصفحات التالية مناقشة معالجة الدالة المعرفة بقاعدتين لنحاول أن نمسك معا بهذا الخطأ ونعالجه .

<u>**مثال**</u> : ابحث زوجيـــة أو فرديـــة الدالة

د (س) = { س^2 س ≥ 0 ، – س^2 س < 0 } من عدمه

<u>**أولا : بحث الزوجية**</u>

باستبدال س بــ – س

{ (– س)^2 – س ≥ 0 ، – (– س)^2 – س < 0 }

{ س^2 س ≤ 0 ، – س^2 س > 0 }

واضح أن منحني الدالة تغير ∴الدالة ليست زوجية

<u>**ثانيا : بحث الفردية**</u>

باستبدال س بــ – س وباستبدال ص بــ – ص

– ص = { (– س)^2 – س ≥ 0 ، – (– س)^2 – س < 0 }

– ص = { س^2 س ≤ 0 ، – س^2 س > 0 }

ص = { – س^2 س ≤ 0 }

ملاحظة :

إذا كان أ ∋] 0 , ∞ [

فإن – أ ∋]– ∞ , 0 [

د(أ) = أ^2

د(– أ) = – (– أ)^2

= – أ^2

د (– أ) = – د (أ)

∴الدالة فردية

هذه هي المعالجة

+ $س^2$ س > 0

منحني الدالة لم يتغير

∴ الدالة فردية

ملاحظة :

∵ د (س) متصلة

∴ وضع س = 0 في أي من الفرعين لا يعني اختلافا بين الدالتين

مثال :

ابحث زوجية أو فردية الدالة

د(س) = { $س^3$ س ≤ 2 ، − $س^3$ س > 2 } من عدمه

أولا : بحث الزوجية

باستبدال س بـــ − س

ص = { − $س^3$, س ≥ −2 ، $س^3$, س < −2 }

منحني الدالة تغير [لاحظ تغير المنحني حول س = −2]

الدالة ليست زوجية

ثانيا : بحث الفردية

باستبدال (س) بـــ (− س) وباستبدال (ص) بـــ (− ص) نجد أن :−

−ص = { − $س^3$, س ≥ −2 ، $س^3$, س < −2 }

ص = { $س^3$, س ≥ − 2 ، − $س^3$, س < − 2 }

منحني الدالة تغير [لاحظ تغير المنحني حول س = − 2]

الدالة ليست فردية

مما سبق الدالة لا زوجية ولا فردية ....

عزيزي القارئ :

تعال معي لتري كيف بحثت كتب ما قبـــل الجامعة زوجية أو فردية الدالة السابقة من عدمه :

د(+ س) = { $س^3$ س ≤ 2 ، − $س^3$ س > 2 }

ثم يوجد

د (− س) = { − $س^3$ س ≥ −2

+ س^3 س > −2

ثم يكتب

∵د (س) = ≠ د (− س) ≠ − د (س)

∴الدالة لا زوجية ولا فردية

لاحظ هذا الخلط الذي تم بين المعالجتين :

إذ أنه من نهاية المسألة فإن الكتاب يتعامل مع المقارنة بين قيمتي الدالة ولاحظ هنا الخطأ الجسيم حينما أراد إيجاد د (− س) أي > (− أ) كقيمة للدالة عند نقطة فما كان منه إلا أن عوض بـ (− س) في فرع الدالة فغير مجالها ومداها .

تعال معي أخي القارئ لنري كيف نعالج الحل من خلال المقارنة :−

س^3 س ≤ 2

د (س) = − س^3 −2 > س > 2

− س^3 س ≥ −2

من الفرعين الأول والثالث :−

إذا كان أ ∋ [2 , ∞ [فإن − أ ∋] − ∞ , −2]

و

د (أ) = أ^3 د (− أ) = − (− أ)^3

د (− أ) = أ^3

د (− أ) = + د (أ)

الدالة زوجية عندما س ∋] − ∞ , −2] U [2 , ∞ [

من (الفرع) الأوسط :

وإذا كان أ ∋] −2 , 2 [فإن − أ ∋] − 2 , + 2 [

و

د (أ) = − أ^3 د (− أ) = − (− أ)^3

د (− أ) = أ^3

د (− أ) = − د (أ)

الدالة فردية عندما س ∋] −2 , + 2 [

∵الدالة زوجية علي فترة من مجالها وفردية علي فترة أخرى

∴الدالة لا زوجية ولا فردية .

إنهم لا يراعون شروط التربيع

عند حل المعادلة س + 1 = 3س + 7



علمتنا الرياضيات المصرية أن نقوم بتربيع الطرفين هكذا

$(\text{س} + 1)^2 = 3\text{س} + 7$

$\text{س}^2 + 2\text{س} + 1 = 3\text{س} + 7$

$\text{س}^2 - \text{س} - 6 = \text{صفر}$

$(\text{س} - 3)(\text{س} + 2) = \text{صفر}$ ← س = 3 أو س = −2

ثم بعد ذلك نتأكد من صحة الحل بالتعويض عن س الناتجة في المعادلة في حالة س = 3

الأيمن = 4 , الأيسر = 16 = 4 ∴ س = 3 حل المعادلة

في حالة س = −2 الأيمن = −1 , الأيسر = 1 = 1

∴ س = −2 ليس حلا للمعادلة

<u>والسؤال الآن :</u>

لماذا لجأنا هنا إلى التعويض ؟

وما هي علاقة المعادلة بعد تربيع الطرفين بالمعادلة قبل التربيع ؟

ولماذا كان س = 3 حلا للمعادلة ولم يكن

س = −2 حلا لها رغم أنه حل للثانية ؟

وهل تربيع الطرفين صحيح علي الإطلاق أم أنه خطأ من بين أخطائنا الجسيمة ؟

<u>الإجابة</u>

هناك خطأ كبير في حالة هذه المعالجة لأننا لم نراع شروط التربيع جيدا وهي في مثل المعادلة السابقة شرطان :−

الأول : مراعاة مجموعة مجال الدالة الجذرية بوضع

$3\text{س} + 7 \geq 0$

ومنه س ∈ $]\frac{-7}{3}, \infty[$

الثاني : مراعاة أن يكون الطرف المشتمل علي س + 1 ≥ صفر

أي س ≥ −1

ومنه س ∈ $[-1, \infty[$

ومن تقاطع الفترتين نجد أن شرط التربيع الأساسي هو

س ∈ $[-1, \infty[$

ولو راعيناه لما لجأنا إلى التعويض بعد الحل إذ أن

$-2 \not\in]-1 , \infty]$

هنا نؤكد علي ضرورة مراعاة شروط (أو قيود) التربيع لطرفي المعادلة المشتملة علي جذور

ففي مثل المعادلة :

2 س − 4 = 1 − س



الشرط الأول س ≤ 2

الشرط الثاني 1− س ≤ 0 س $\geq$ 1



وتقاطع فترتي الشرطين = $\emptyset$

مجموعة الحل = $\emptyset$ دون تربيع ودون لجوء للتعويض

هذا المدخل في معالجة المعادلات المشتملة علي جذور تربيعية يدفعنا دفعا للنظر في معالجة المعادلات المشتملة علي دالة مقياس بتربيع الطرفين في مثل :

حل المعادلة 2 س + 3 = 1 − 3 س



هنا تلجأ بعض الكتب لتربيع الطرفين هكذا

4 س^2 + 12 س + 9 = 1 − 6 س + 9 س^2

5 س^2 − 18 س− 8 =صفر (5س + 2) (س − 4) = صفر ⟸

ومنه س = $\frac{-2}{5}$ أو س = 4

ثم تضطر تلك الكتب للتعويض لتكتشف أن مجموعة الحل = { $\frac{-2}{5}$ }

والسؤال

لماذا لم يكن س = 4 حلا للمعادلة ...

إن لجوءنا للتعويض يعني أن هناك خطأ كبيرا ارتكبناه في معالجة الحل بتربيع الطرفين فما هو هذا الخطأ .

إن مرجع الخطأ هنا هو أننا لم نراع شروط تربيع الطرفين فالطرف الأيمن = 2 س + 3 موجب دائما .



بينما الطرف الأيسر = 1 − 3 س موجب عندما س < $\frac{1}{3}$ وسالب عندما س > $\frac{1}{3}$

إذن كان المفروض قبل تربيع طرفي المعادلة أن نبحث أولا عن شـروط التربيـع وسـنجدها س $\in$] − ∞ , $\frac{1}{3}$ [

وبسهولة سنجد أن 4 $\not\in$] − ∞ , $\frac{1}{3}$ [

لذلك فإننا نري أن حل المعادلات المشتملة علي المقياس بتربيع الطرفين علـــي الإطـــلاق ثم التعـــويض لاختيار الحل الصحيح هو خطأ يستوجب منا أن نؤكد علي ضرورة مراعاة الدقة الرياضية في معالجته .

وإلا فإننا قد نجد أنفسنا أمام سؤال كهذا .

ارسم الدالة د (س) = | س − 1 | + 3

ثم حل المعادلة د (س) = صفر

وهنا سنجد أنفسنا أمام المعادلة :

| س − 1 | = − 3

فهل نقبل أن نربع الطرفين هنا ؟...... لا بالطبع

في الإجابة الهندسية عن السؤال : ما هي علاقة المعادلة بعد تربيع الطرفين بالمعادلة قبل التربيع ؟ ســـنجد لماذا كان هذا الخطأ الذي اســـتوجب منا التعويض للبحث في صحة الحل من عدمه ...

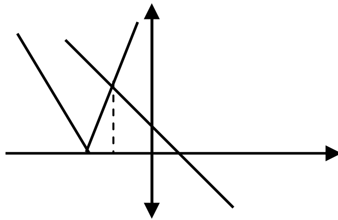
<u>هندسيا</u>

حل المعادلة | 2 س + 3 | = 1 − 3 س

يعني البحث عن نقط تقاطع منحنيي الدالتين

$د_1$ (س) = | 2 س + 3 |

$د_2$ (س) = 1 − 3 س



كما بالشكل

وتكون الإحداثيات السينية

لنقط التقاطع هي مجموعة الحل للمعادلة.

<u>ماذا يعني تربيع الطرفين هندسيا إذن ؟</u>

1− تربيع $د_1$ (س) = | 2 س +3 | يعني تحويلها إلى معادلة مـــن الدرجـــة الثانيـــة

[د1 (س)]^2 = 4 س2 + 12 س + 9

ورأس المنحني لها هو نقطة رأس الزاوية ($\frac{-3}{2}$, 0) للدالة $د_1$ (س)

ولان قيم ص موجبة قبل التربيع فهي تظل موجبة بعد تربيعها .

2− بينما يعني تربيع $د_2$ (س) = 1 − 3 س تحويلها أيضا إلى معادلة

من الدرجة الثانية

[$د_2$ (س)]^2 = 1−6س + 9س^2

راس المنحنى لها هو ($\frac{1}{3}$ ، 0) وهو نفسه نقطة تقاطع $د_2$ (س) مع محور السينات .

ملاحظة :

قبل تربيع د$_2$ (س) وبحث إرشاداتها

نجد أن د$_2$ (س) موجبة عند س < $\frac{1}{3}$

ونجد أن د$_2$ (س) سالبة عند س > $\frac{1}{3}$

وهنا سر خطأ المعالجة بتربيع الطرفين على الإطلاق .

إذا أنك تضطر عند س =4 للمساواة بين طرفين أحدهما موجب والآخر سالب تم بتربيع الطرفين تحصل على موجبتين متساويين

[مثل − 11 = −11 [لاحظ الخطأ هنا] وبالتربيع يصبح 121 = 121]

والترجمة الهندسية (البيانية) للمعادلة هي

[د1 (س)]^2 = [2> (س)]^2 هي كما بالشكل ... لاحظ أن الجزء المنقط من منحنى [2> (س)]^2 هو الجزء الذي لا يصح تربيعه إذ أن مساواة قيم ص لطرفي د$_1$ (س) ، د$_2$ (س) فيه لا يجوز ... لذلك نرى أن إطلاق الحل بتربيع الطرفين هو خطأ يستوجب أن ننتبه إليه .

الخلاصة

إذن عند البحث عن حلول لمعادلات تشتمل علي جذور تربيعية أو مقياس وعند تربيع الطرفين , لا داعي مطلقا للتأكد من صحة الحلول الناتجة بالتعويض في المعادلة الأصلية بالقيم الناتجة ما دمنا قد راعينا في البداية شروط التربيع للطرفين .

مع ملاحظة أنه في حالة |د (س)| = أ , أ ≥ صفر

أو |د (س)| = |هـ (س)| فإن شرط التربيع متوفر لأن الطرفين موجبان لذلك نربع مباشرة

أما في حالة |د (س)| = هـ (س) فإننا نضع شرط التربيع أولا : قبل الحل وهو هـ (س) > صفر

ثم نحل بالتربيع ولا داعي للتعويض بعد ذلك لأننا سنختار من الحلول ما يتناسب مع كون هـ (س) > صفر .

ملاحظة هامة :

إذا كانت النقطة (أ , ب) هي نقطة تقاطع دالتي الطرفين قبل التربيع فإن النقطة (أ , ب^2) هي نقطة تقاطع دالتي الطرفين بعد التربيع [ليست (أ , ب2) النقطة الوحيدة لكنها التي تعنينا كحل]

لاحظ أن س = أ هو حل المعادلة المعطاة .

حل المعادلات المشتملة علي
دالة المقياس
وإنهم يسرقون القدرة علي التحليل

حل المعادلة الآتية :

| س − 2 | = 3

| 2 س − 4 | = − س

| 2س − 1 | = س + 2

بعض الكتب تلجأ إلى حل المعادلة الأولى كالتالي :−

| س − 2 | = 3 ⟸ س − 2 = ± 3

إما س − 2 = + 3   أو س − 2 = − 3

س = 5   س = −1

∴ س ∈ { −1 , 5 }

وسر الخطأ هنا هو أننا لم نحدد متي تساوي الدالة العدد + 3

كذلك لم نحدد متي تساوي العدد −3 وهذا الحل غير الرياضي وإن كان صحيحـا في هـذه المسـألة

فإنه سـوف يورثنا خطـأً في معالجة مسألة مثل :

حل المعادلة | 2 س − 4 | = − س

والتي ستحل طبقا للحل الأول كالتالي :−

| 2س − 4 | = − س ⟺ 2 س − 4 = ± (− س)

إما 2 س − 4 = − س   أو 2 س − 4 = + س

3س = 4   س = 4

س = $\frac{4}{3}$

وكلا الحلين حل خاطئ فهما ليسا حلين للمعادلة

والمعـالجة الصحيحة تكـون بإعادة تعريف دالة المقيـاس تعريفا صحيحا كالتالي :−

| 2 س − 4 | = { 2 س − 4   2س − 4 ≥ 2

-2 س $+ 4$ س ≥ 2

وبالتالي تصبح المعادلة

عندما س ≤ 2	عندما س ≥ 2
2 س $- 4 = -$ س	$- 2$ س $+ 4 = -$ س
3 س $= 4$	$-$ س $= - 4$
س $= \frac{4}{3}$	س $= 4$
$\frac{4}{3} \notin]\infty , 2]$	$4 \notin [2 , \infty - [$
ليس حلا للمعادلة	4 ليس حلا للمعادلة

مجموعة الحل للمعادلة $|2$ س $- 4| = -$ س   هي $\varnothing$

إن لإعادة تعريف دالة المقياس بدقة أهمية كبيرة في حل معادلات مثل :-

حل $|2$ س $- 1| = |$س $+ 1|$

تلجأ بعض الكتب إلى الحل التالي :-

بتربيع طرفي المعادلة نحصل علي

4 س$^2 - 4$ س $+ 1 =$ س$^2 + 2$س $+ 1$

3 س$^2 - 6$ س $=$ صفر $\Longleftrightarrow$ س $(3$ س $- 6) =$ صفر

إما س $= 0$ أو س $= 2$

ثم بعد ذلك نلجأ إلى التعويض بقيم س التي حصلنا عليها في الأصلية ونختار الذي يحققها .

والتعويض هنا ضروري لان بعض الجذور للمعادلة بعد تربيعها قد لا يحقق المعادلة الأصلية وبالتالي لا يكون حلا لها . { هنا س $= 2$ يحقق المعادلة بينما س $=$ صفر لا يحققها }

حينما عالجت الكتب قبل الجامعية المسألة السابقة بتربيع الطرفين ارتكبت خطيئة رياضية لأنها استبدلت عبارة رياضية بعبارة أخرى رياضية غير مساوية لها وهي بذلك سلبت عقل الطالب القدرة علي التحليل بدلا من أن تكسبه تلك القدرة .

فما هو التحليل ؟

في كتابه " التربية التحليلية " يؤكد د " سعيد إسماعيل علي " : أن كلمة التحليل فلسفيا تعني المعني اللفظي الذي يتبادر للذهن فهي تعني في اللغة الفتح والفك أي أنها تعني فك كل مركب إلى أجزائه أو العناصر المكونة له .

والتحليل لا يعني أن تترجم عبارة إلى عبارة أخرى مساوية لها في المعني بل لابد أن تجئ العبارة الثانية أكثر إبرازا للعناصر التي تنطوي عليها العبارة الأولى فبالإضافة إلى تساويهما يجب أن يضاف للثانية : زيادة في الوضوح وفي عرض عناصر المعني .

وينقسم منهج التحليل إلى خطوات ثلاث :

1- البدء بالمركب , إذ لا معني للتحليل إلا حين يكون الشيء مركبا

2- حل المركب إلى عناصره البسيطة مع إظهار هذه العناصر والعلاقات الكائنة بينها

3- المطابقة بين المركب وعناصره .

إن منظومة الأهداف التربوية الهرمية لـ " بلوم " تنظر إلى التحليل كواحد من الأهداف القيمة التي تبتغي عملية التعلم تحقيقها والوصول إليها .

ونحن حينما نسلك طرقا نظنها الأنسب في معالجة موضوع ما وشعور يحكمنا بأننا نسهل المادة العلمية للطالب فإننا نضر عقلية الطالب من حيث لا ندري .

إن الكثيرين من المعلمين وبفضل هذه التربية الخاطئة النابعة من كتب ما قبل الجامعة يضعون درجة الطالب التي سيحصل عليها في الامتحان في المرتبة الأولى من اهتماماتهم أما ما سيكتبه الطالب أثناء تعلمه فهذا آخر شئ يلتفتون إليه ..

نضرب مثالا لذلك :-

في مسألة مثل :

حل المعادلة | 2 س − 1 | = | 3 − س |

الكتب قبل الجامعية تتعامل مع مثل هذا المثال علي طريقة " لا تقربوا الصلاة " وتكتفي وتؤكد علي ضرورة حله بيانيا فقط ربما لظن من مؤلفيها أن معالجة هذا المثال صعبة تحليلا أو ربما لظن آخر هو أن معالجتها أعلي من عقلية طالب الصف الثاني الثانوي !!

وتعالي معي عزيزي القارئ لنري هل هناك صعوبة في إعادة تعريف الدالتين .

$د_1$ (س) = | 2 س − 1 | & $د_2$(س) = | 3 − س | ثم الحصول على مجموعة الحل للمعادلة من خلال المساواة بين الدالتين في مجاليهما المشترك .

| 2س - 1 | = + (2س − 1) ، س ≤ $\frac{1}{2}$ ؛ − (2 س − 1) ، س ≥ $\frac{1}{2}$

| 3 − س | = − (3 − س) ، س ≤ 3 ؛ + (3 − س) ، س ≥ 3

$د_2$ (س) = − 3 + س $د_2$ (س) = 3 − س

3

(1 − 2 س) − $\frac{1}{2}$ 2س − 1

$\frac{1}{2}$

عندما س ≤ 3	عندما ≥ س ≥ 3	عندما س ≥ $\frac{1}{2}$
− 3 + س = 2 س − 1	3− س = 2س −1	3−س = −2س +1
س = −2	س = $\frac{4}{3}$	س = −2
−2 ∌] 3، ∞]	∍] $\frac{1}{2}$ ، 3]	−2 ∍] − ∞، $\frac{1}{2}$]
س =−2	س = $\frac{4}{3}$ حل للمعادلة	س =−2
ليس حلاً للمعادلة		حل للمعادلة

وبذلك يمكن حل المسألة بسهولة كما يلي :

إما	أو
2س −1 = 3−س	2س−1 = −(3−س)

بحث قابلية الاشتقاق
لا يجـــــوز!

وردت العبارات الآتية في كتاب ((التفاضل والتكامل للصف الثالث الثانوي صـــــ27)) :

[قواعد الاشتقاق التي سبق دراستها في العام الماضي لا يجوز استخدمها في بحث قابلية الاشتقاق . ولبحث قابلية الاشتقاق عند س = س$_1$ لابد من استخدام التعريف :

$$\frac{ءص}{ءس} = \text{نها}_{هـ \leftarrow 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

..انتهت العبارة]

لـــاذا تمثـــل هذه العبـــارة أحـــد أهم الخطايا العشـــر لرياضيـــات ما قبل الجامعة ؟؟

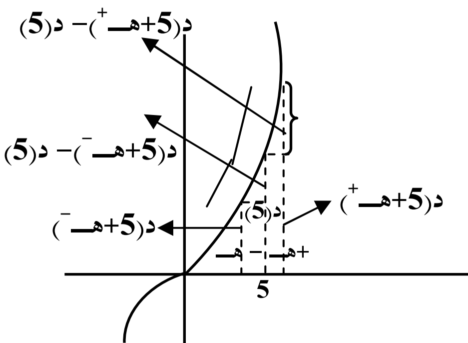
وهل حقا لا يجوز استخدام قواعد الاشتقاق في بحث قابلية الدالة للاشتقاق ؟

لماذا ألجأ للتعريف وأنا ابحث قابلية الاشتقاق لدوال معرفة بقاعدة واحدة مثل د (س) = $\sqrt{س}$ والتعريف ينتـــهي بنا إلى المشتقة الأولى

د$^-$(س) = $\frac{1}{2\sqrt{س}}$ وهى غير قابلة للاشتقاق عند نقطة عدم تعريف المشتقة الأولى س =0 سواء حصـــلنا عليهـــا بالتعريف أو بقواعد التفاضل ؟

سوف نحاول في الصفحات التالية أن نبحث في صحة هذه العبارة وفيما أثارته من أسئلة :-

ملاحظة هامة (1) :



عند استخدام التعريف في بحث قابلية الاشتقاق لدالة ما ؛ فإنه يكتفي باستخدامه مباشرة إذ أن الدالة القابلة للاشتقاق تكون ضمنياً متصلة وهذا من المفهوم الهندسي للمشتقة الأولى

حيث أن المشتقة اليمنى = المشتقة اليسرى للدالة وبالتالي فإن ميل المماس الأيمن = ميل المماس الأيســـر وبالتالي ينطبق المماسان كل على الآخر .

لاحظ في الشكل عند قابلية الاشتقاق وعند هـــ ← 0 فان الخطين الرأسيين يمـــين ويســـار س = 5 يتحركـــان وينطبقان على المستقيم س = 5 ثم يتحرك الوتران في المثلثين ويصحبان مماسين عند س = 5 . أي أننا باستخدام التعريف نبحث ضمنيا اتصال الدالة من عدمه .

ملاحظة هامة (2) :-

أما إذا أردنا بحث الاتصـــال كمدخل لبحث الاشتقـــاق فإننـــا أمام حالتين :-

1- إذا كانت د (س) غير متصلة عند س = أ

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

2- أما إذا كانت الدالة متصلة عند س = أ فإننا لا نلجأ للتعريف لاستكمال البحث و إنما نلجـــأ مباشـــرة لقواعـــد الاشتقاق العادية في حالة الدالة المعرفة بقاعدتين حول س = أ ونوجد المشتقة اليمنى $د^-$($أ^+$) ، واليسرى دَ ($أ^-$) ونعوض فيهما .. ونحدد بذلك ميلي المماسين – وزاوية الميل بالضرورة – ونبحث هل هما متطابقـــان أم لا .

ملاحظة هامة (3) :-

يرجى الانتباه هنا إلى أننا حينما نعوض بـــ س = أ في المشتقة اليمـــنى والمشتقة اليسرى فإننا نتعامل مع نهايات وليس مع قيم لدوال كمثل ابحث وجود نهاية للدالة

$$د(س) = \begin{cases} 3س - 1 & س > 1 \\ س + 1 & س \leq 1 \end{cases}$$

رغم أن الدالة غير معرفة عند س = 2 إلا أنه للدالة نهاية عندها

د ($أ^+$) = 2 ، د ($أ^-$) = 2 أيضاً .

هذا المدخل رأيت أن أبدأ به ونحن نناقش صحة تلك العبارة التي وردت بكتاب الصف الثالث الثانوي ...ومن خـــلال هذه المقدمة فإننا نعترض على صحة تلك العبارة من وجهين :-

الأول : لماذا ألجأ للتعريف وأنا ابحث قابلية الاشتقاق لدوال معرفة بقاعدة واحدة مثل

$د_1$ (س) = $\sqrt{س}$

$د_2$ (س) = $س^2 - 5$

$د_3$ (س) = س + $\frac{1}{س}$

إذ انه عند س = أ – في مجال هذه الدوال تكون

$$\begin{cases} د'(أ) = \frac{1}{2\sqrt{أ}} \\ د'(أ) = 2أ \\ د'(أ) = 1 - \frac{1}{أ^2} \end{cases}$$ حيث أ ∈ لمجال الدالة

سواء استخدمنا التعريف أم استخدمنا قواعد الاشتقاق و بالتالي نستطيع أن نحدد أن :-

د$_1$ (س) قابلة للاشـــتقاق لكل س ∋ ح − {0} للأولى

د$_2$ (س) قابلة للاشـــتقاق لكل س ∋ ح للثانية

د$_3$ (س) قابلة للاشتقاق لكل س ∋ح − {0} للثالثة .

الثاني : هذا التحذير الذي أثارته العبارة الخاصة ببحث قابلية الاشتقاق بالتعريف فقط . ربما كان مَرَدُّه الخـــوف مـــن استخدام قواعد الاشتقاق مباشرة دون دراسة اتصال الدالة أولاً في مثل الدالة :

د (س) = { 3 س −2 س ≤ 1 ، 3س +2 س > 2 }

إذ أنه من قواعد الاشتقاق

فإن د (س) = { 3 س ≤ 1 ، 3 س > 1 }

هنا دَ (1^+) = دَ (1^-) = 3

ورغم ذلك فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق لأن الدالة د (س) أصلاً غير متصلة عند س =1 و بالتالي فهـــي غير قابلة للاشتقاق عند س =1

ومعالجة لهذا كان الأصح أن نقول أنه :−

1− إذا أردنا بحث قابلة الاشتقاق لدالة ما عند س = أ باستخدام التعريف فانه يكتفي به دون دراسة اتصـــال الدالة قبل استخدامه

2− أما إذا أردنا بحث اتصـــال الدالة عند نقطة كمقدمة لبحث قابلية الاشتقاق .

أ) ففـــي حـــالة الدالـــة الغـــير متصلة تكون الدالة غـــير قابلة للاشـــتقاق مباشـــرة .

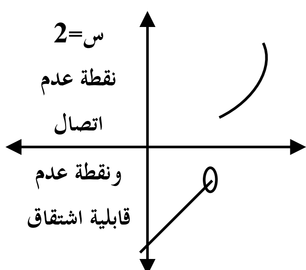
ب) أما في حالة الدالة المتصلة فإننا نوجد المشتقة الأولى من قواعد الاشتقاق ونبحث هل دَ ($أ^+$) تســـاوى دَ ($أ^-$) أم لا ثم نحكم على قابلية الاشتقاق من عدمه .

إن استخدام التعريف يعطـــيني في النهاية المشتقة الأولى وقواعد الاشتقاق تعطى نفـــس المشـــتقة الأولى و بالتالي يصلح كلاهما لبحث قابلية الاشتقاق من عدمه ومع التعريف لا داعي لبحث الاتصال .بينمـــا في حالـــة استخدام القواعد فإننا نبدأ ببحث اتصال الدالة .

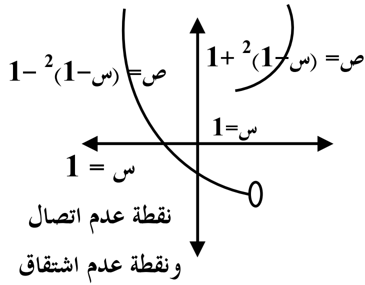
أمثلة بيانية لنقط تكون عندها د (س) غير قابلة للاشتقاق :

1) د (س) = { $س^2$ س ≤ 2 ، 4س −9 س > 2 }

لاحظ أن ميلى المماسين = 4



قبل وبعد س = 2

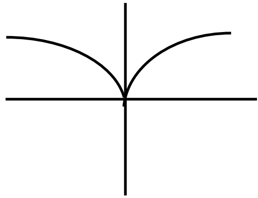


2) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{س}-1)^2+1 & \text{س} \ge 1 \\ (\text{س}-1)^2-1 & \text{س} < 1 \end{cases}$$

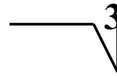
3) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & \text{س} \ge 1 \\ -\text{س}+2 & \text{س} < 1 \end{cases}$$

ص=س²
ص=−س+2
(1,1)

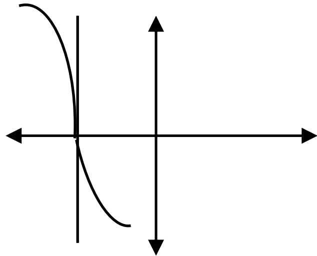
لاحظ أن (1،1) نقطة اتصال
وهى نقطة عدم قابلية اشتقاق
للدالة وتسمى (نقطة زاوية) ..
لأنها نقطة عندها توجد زاوية قياسها ∌ { صفر أو 180° } بين المماسين القبلي والبعدي عند س =1



4- $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}^2}$



لاحظ أن النقطة (0،0) نقطة
اتصال وهى نقطة عدم قابلية اشتقاق
تسمى هذه النقطة نقطة الناب لأن
ميل المماس القبلي = − ∞ وميل المماس البعدي = + ∞



5- نقطة الانقلاب التي
عندها يكون المماس رأسياً
هي نقطة عدم قابلية اشتقاق .

الفصل بين الجبر والتفاضل
والقسمة على س بأكبر أس في الدالة!

بعد أن تعرفنا على العددين $+\infty$ ، $-\infty$ وحددنا تعاملنا معها بدقة ، وأكدنا احترامهما كعددين يختلف كل منهما عن الآخر ، بقى أن نناقش هذه الكتب التي تساوى بينهما بعبارة النهاية غير معروفة .

فعند بحث النهاية

أوجد $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^2}{-\text{س}}$ ، $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^2}{\text{س}}$

نجد أن بعض كتب ما قبل الجامعة تقسم بسطاً ومقاماً على س2 هكذا

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^2}{-\text{س}} = \lim_{\text{س}\to\infty}\frac{1}{\frac{-1}{\text{س}}} = \frac{1}{0} = \mp\infty$$

$$، \lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^2}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\text{س}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

كان هذا ما تعلمناه طوال تاريخنا الرياضي ولم يعترض عليه أحد أبدا حتى خرج علينا كتاب " التفاضل " للصف الثاني الثانوي منذ ثلاث سنوات فقط بقاعدة تقتضي أن نقسم بسطاً ومقاماً على س بأكبر أس في المقام هكذا .

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^2}{-\text{س}} = \lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^2}{-\text{س}} = \lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}}{1} = +\infty$$

هنا اختلف المدرسون والموجهون ومؤلفو الكتب الخارجية وأخذوا يضربون أخماسا في أسداس إذ كيف يحدث هذا وكيف نخالف آباءنا الذين وجدناهم على أمة و إنا على آثارهم مقتدون ...

وحتى ساعة تاريخه في مستهل العام 2002 م مازال أحد الكتب الخارجية الشهيرة والصادر بتصريح من وزارة التربية والتعليم يقسم بسطا ومقاما على س بأكبر أس في الدالة .

بل إن ما يضحك وما يبكي في آنٍ واحد أن أحد مؤلفي الكتب الخارجية نظر للمسألة على أنها مسألة فقهية اختلف حولها كبار الأئمة ربما لأنه لم ينس أنه يخاطب من خلال كتابه طلاب وطالبات الصف الثاني الثانوي الأزهري .. واقرأ معي هذه الصورة الضوئية لنص ما كتبه بالحرف الواحد ....

ملحوظة (3) :

هناك خلاف مشهور في حل المسائل هل نقسم على أكبر أس للمتغير "س" في المقام أم نقسم على أكبر أس مطلقا (في البسط أو المقام) .

نفضل الآتي : خذ من البسط والمقام أكبر أس فيهما كعاملين مشتركين ينتج الأشكال التالية :

(1) إذا كان البسط والمقام من نفس الرتبة : $\frac{س^ن}{س^ن}$ × (عدد) الناتج عدد

(2) إذا كان البسط أكبر رتبة فالشكل الناتج : $\frac{س^م}{1}$ × (عدد) : الناتج ∞ والدالة ليس لها نهاية .

(3) إذا كان المقام أكبر رتبة فالشكل : $\frac{1}{س^م}$ × عدد الناتج (صفر)

ومن الواضح أن هذا المؤلف بإخراجه العامل المشترك لكل من البسط والمقام ثم بقسمة العاملين على بعضهما لم يفطن إلى أنه يقسم بالفعل على س بأكبر أس في مقام الدالة وأنه حسم القضية لصالح المعالجة الرياضية الصحيحة لها . ما الذي أورثنا هذا الفهم غير الدقيق ، وهذا الخلط غير الواضح بين ما هو صحيح وما هو غير صحيح ؟

إنه الفصل بين فروع الرياضيات وتقسيمها إلى حساب وجبر وتفاضل وتداخل الموضوعات بينهما بحيث لم يعد ممكنا تحديد ما هو جبر وما هو تفاضل .. وتقريبا نحن الدولة الوحيدة في العالم التي تفصل دراسة الدالة عن دراسة نهاية الدالة .

فتجد الطالب يدرس الدالة د (س) = $س^2$ فى كتاب الجبر ثم يدرس

$\lim_{س \to 1} س^2$ ، $\lim_{س \to -\infty} س^2$ ، $\lim_{س \to \infty} س^2$ فى كتاب آخر اسمه التفاضل

وهذا الفصل التعسفي أحد أهم الخطايا العشر في رياضيات ما قبل الجامعة ....

إن هذا الفصل أحدث فصلاً آخر في فهم المعلمين والموجهين ومؤلفي الكتب الخارجية على السواء بين الدراسة البيانية للدالة والدراسة التحليلية لها وكأن هذا علم يختلف تماما عن ذلك العلم .

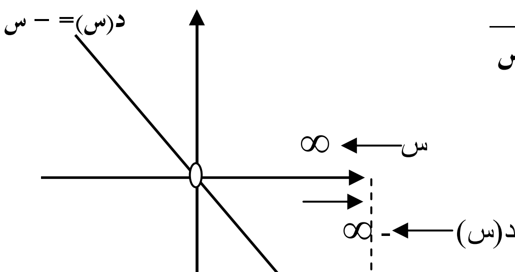
فلو طلبنا دراسة $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2}{-س}$ من خلال رسمها بيانيا لوجدنا أن

د(س) = $\frac{س^2}{-س}$ تكافئ

د(س) = − س ، س ≠ صفر

وعند رسم هذه الدالة بيانيا

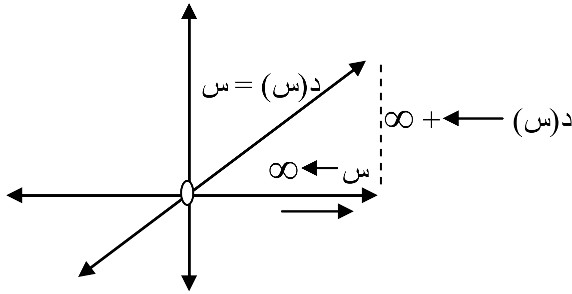
سنجده كما بالشكل .



لاحظ هنا أنه عندما س ⟵ + ∞ فإن د(س) ⟵ − ∞

كذلك إذا طلبنا دراسة $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2}{+س}$ من خلال رسمها بيانيا لوجدنا أن

د(س) = $\frac{س^2}{س}$ تكافئ الدالة د (س) = س ، س ≠ صفر عند رسم هذه الدالة بيانيا سنجد الشكل التالي .



لاحظ هنا أ نه عندما س ⟵ + ∞ فان د(س) ⟵ + ∞

<u>مثال تطبيقي :</u>

أوجد نها (س ⟵ ∞) حيث س ≠ 1

لاحظ أن د (∞) = $\frac{\infty}{-\infty}$ وهى حالة عدم تعيين

<u>حل غير صحيح</u>

بقسمة كل من البسط والمقام على س2

النهاية = نها (س ⟵ ∞) $\frac{[1 - \frac{1}{س^2}]}{[\frac{1}{س} - \frac{1}{س^2}]}$ = + ∞ = $\frac{1}{0}$

<u>الحل الصحيح</u>

بقسمة كل من البسط والمقام على س

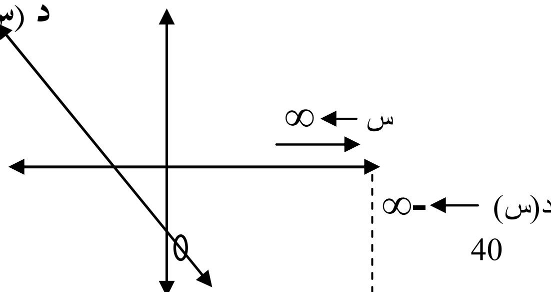
النهاية = نها $\frac{[1 - \frac{1}{س}]}{[\frac{1}{س} - 1]}$ = − ∞ = $\frac{\infty}{-1}$

لماذا كان الحل الثاني هو الحل الصحيح ؟ لأنه يتوافق مع الدراسة البيانية للدالة

د (س) = $\frac{س^2 - 1}{1 - س}$ = $\frac{(س - 1)(س + 1)}{-(س - 1)}$ س ≠ +1

أي أن د (س) تكافئ الدالة هـ (س) = − س − 1 , 1 − س

لاحظ أن نها هـ (س) = − ∞



<u>حل ثالث</u> :بأخذ س بأكبر
قوة عاملاً مشتركاً في البسط وكذلك في المقام

$$\text{نها}_{س\to\infty} \frac{س^2 - 1}{1 - س} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{س^2\,[1 - \frac{1}{س}]}{س\,[\frac{1}{س} - 1]} = -\infty$$

لاحظ هنا أنك تقسم على س بأكبر قوة في المقام أيضا

<u>حل رابع</u>: في حالة نهاية خارج قسمة كثيرتي حدود فإن

$$\text{النهاية} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{\text{الحد المشتمل علي س بأكبر قوة في البسط}}{\text{الحد المشتمل علي س بأكبر قوة في المقام}}$$

أي أن النهاية $= \text{نها}_{س\to\infty} - س = -\infty$

لاحظ هنا أيضا انك تقسم على س بأكبر قوة في المقام .

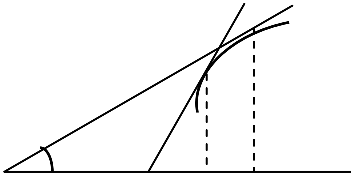
<u>ملاحظة</u> : قوة س هي أسها .

المشتقة الثانية دً (س)
وماذا تعنى هندسيا لمنحنى الدالة ؟

درسنا في كتب ما قبل الجامعة علاقة المشتقة الأولى دَ (س) بمنحنى الدالة د (س) وفيه نجد أن :–

المشتقة الأولى دَ (س) لأي دالة تعني هندسياً :

ميل المماس لمنحنى الدالة عند أي نقطة تنتمي للمنحنى [وميل المستقيم هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع محور السينات الموجب]



أ– عند تزايد الدالة د (س)

فإن دَ (س) > صفر

لأن المماسات تصنع زوايا

حادة مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات ظا هـ >صفر

حيث صفر< ق (هـ) <90ْ

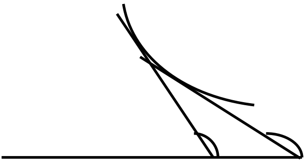
ب– وعند تناقص الدالة د (س)

فان المماسات تصنع زوايا منفرجة

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

ظا هـ < صفر . حيث

90ْ < ق(هـ) < 180ْ

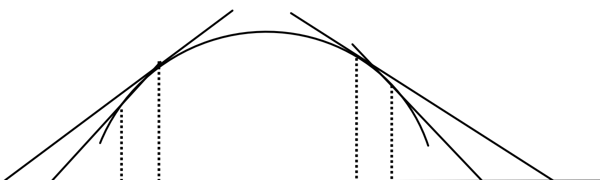


هذا المفهوم عمقته وفسرته بشكل ممتاز كتب ما قبل الجامعة التي تتناول الرياضيات بالشرح والتحليل .
لكن الذي لم تفسره تلك الكتب هو علاقة دً (س) بتحدب الدالة . ولماذا عندما دً (س) < صفر يكون التحدب لأسفل ؟
ولماذا عندما دً (س) > صفر يكون التحدب لأعلى ؟وهذا ما سنحاول البحث عن تفسير له في الصفحات التالية
.

نعلم أن دً (س) هي المشتقة الأولى لدالة الميل دَ (س) و بالتالي فان دً (س) هي التي تحدد تزايد وتنـــاقص دالة الميل دَ (س)

أولا : في حالة تحدب منحنى الدالة لأعلى .

لاحظ من على الرسم



هـ1 هـ2 س2 س1 س4 س3 هـ3 هـ4

أنه مع تزايد قيم س من

س1 إلي س2 إلى س3 إلى س4

فإن زاوية ميل المماس تتناقص س1

حيث أن :

ق (هـ2) الحادة < ق (هـ1) الحادة

و بالتالي فان ظا (هـ2) < ظا (هـ1)

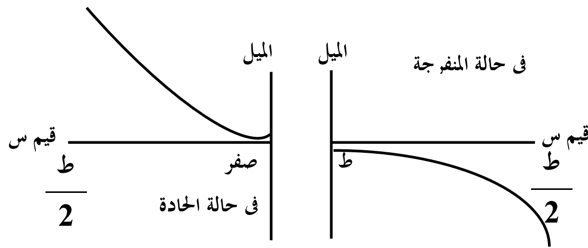
وبالمثل

ق(هـ4) المنفرجة < ظا (هـ 3) المنفرجة

و بالتالي فإن :

ظا (هـ4) < ظا (هـ 3)

أي أنه مع تزايد قيمة س فإن ميل المماس للمنحنى يتناقص ...يمكن تمثيل العلاقة بين قيم س وميل المماس للمنحنى في حالة التحدب كما بالشكل



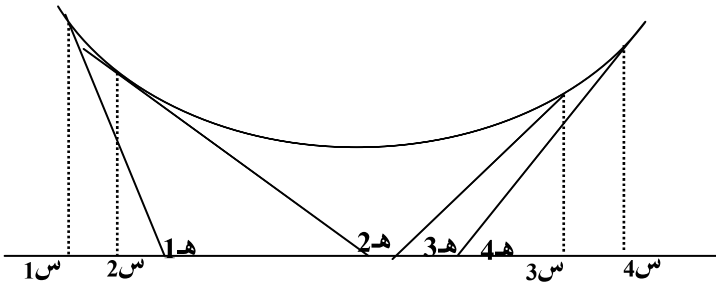
خلاصة ما سبق :

في حالة تحدب منحنى الدالة لأعلى فإن :-

ميل المماس دَ (س) يتناقص و بالتالي فان :

المشتقة الأولى دً (س) تكون سالبة

ثانيا : في حالة تحدب منحنى الدالة لأسفل



لاحظ من الرسم أنه مع تزايد قيم س من س1 إلى س2 إلى س3 إلى س4 فإن زاوية ميل المماس تتزايد

حيث أن :-

ق (هـ2) المنفرجة > ق (هـ1) المنفرجة

ومنه ظا (هـ2) > ظا هـ1 .

بالمثل : ق (هـ4) الحادة > ق (هـ3) الحادة

ومنه ظاهـ4 > ظاهـ3

أي أنه مع تزايد قيم س فإن ميل المماس للمنحنى يتزايد وكذلك يمكن تمثيل العلاقة بين قيم س وميل المماس عندها في حالة التحدب كالآتي :

الميل الميل

$\frac{ط}{2}$ ط ْ صفر $\frac{ط}{2}$

في حالة الحادة

خلاصة ما سبق :-

في حالة تحدب المنحنى لأسفل فإن :

ميل المماس دَ (س) يتزايد مع تزايد س وبالتالي فان دً (س) تكون موجبة

ملاحظات هامة :

1- لاحظ أن الدالة د(س) = ظا س هي الدالة المثلثية الوحيدة المتزايدة على مجالها .

2- كل الدوال التي على الصورة :

د (س) = (س− أ)$^{2ن+3}$ + ب ، ن ∈ ص$^{+}$

يتحقق لها أن .

دَ(س) = صفر عند س = أ

، دً (س) = صفر عند س = أ

وببحث وجود قيم عظمى وصغرى محلية نجد أن الدالة ليست لها قيمة عظمى أو صغرى محلية عند س = أ وببحث التحدب نجد أنها كلها لها نقطة انقلاب عند النقطة (أ ، ب) .

3- كل الدوال التي على الصورة :

د(س) = (س− أ)$^{2ن+2}$ + ب ، ن ∈ ص$^{+}$

يتحقق لها أن

دَ (س) = صفر عند س = أ

، دً (س) = صفر عند س = أ

وببحث المماسات نجد أنها كلها لها نقطة قيمة صغرى محلية عند النقطة (أ ،ب)

مما سبق نستطيع الآن أن نعرف النقطة الحرجة :

" وهى تلك النقطة التي غالبا ما يتغير حولها اتجاه المماسات وقليلاً ما يتغير حولها تحدب المنحنى وتكون النقطة حرجة إذا تحقق عندها أحد أمرين

1- صَ = صفر

2– صَ غــير معــرفة عندها [أي الدالة متصلة عنــدها وغــير قابلة للاشتقاق]

وإذا كانت الدالة متصلة عن س = أ فإن الشرط الضروري لوجود قيم قصوى وعظمى أو صغري محلية ، عند س = أ هو تحقق واحد من الشروط السابقة صَ = صفر أو صَ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة أو حتى غير معرفة عندها .

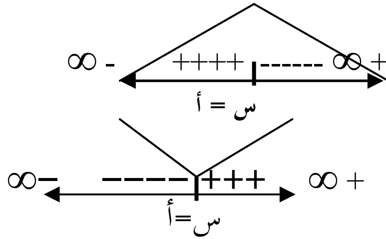
ملاحظة :–

الشروط السابقة ضرورية لوجود قيم قصوى ولكنها غير كافية – راجع عائلات الدوال التي ذكرناهــا للتحقق من أن المشتقة قد تنعدم ولا يكون عند النقطة قيم قصوى (عظمى أو صغرى) .

والشروط الكافية لوجود هذه النهايات القصوى هي :–

1– مع تحقق أحد الشروط الضرورية عند س = أ يتحقق ما يلي :

صَ تتغير إشارتها حول س = أ



*** من + إلى – (قيمة عظمى)**

*** من – إلى + (قيمة صغرى)**

2– أو مع تحقق أحد الشــروط الضــرورية نبحث التحدب

في حالة صً > صفر عند س = أ

∴ عند النقطة قيمة صغرى محلية

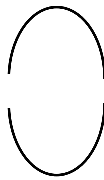
وفى حالة صً < صفر عند س = أ

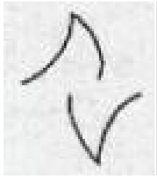
∴ عند النقطة قيمة عظمى محلية

والشرط الضروري لوجود نقطة انقلاب للدالة د(س) هو أن تكون دً (س) = صفر عند س = أ أو أن تكون غير معرفة عندها .. وهو شرط غير كاف .والشرط الكافي لوجود نقط انقلاب هو تغير إشارة دً (س) حول نقطة انعدامها أو نقط عدم تعريفها .

5– جدول تطبيقي على القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب

			نقط الانقلاب
نقط عظمى محلية	(1)		(2)
نقط صغرى محلية	(3)		(4)





شكل (1) : دالة مثل د (س) = $\begin{cases} \frac{1}{س} & \text{عند } س \geq 1 \\ 2^{س-1} & \text{عند } س < 1 \end{cases}$ للشكل (3) : دالة مثل د (س) = $\begin{cases} & \text{عند } س \geq 1 \\ -2^{س-1} & \text{عند } س < 1 \end{cases}$ للشكل (2) : د (س) = $\lvert 1 - س^2 \rvert$ عند (−1 , 0) , (1 , 0) للشكل (4) : د(س) = $\lvert س^2 - 1 \rvert$ عند (−1 , 0) , (1 , 0)	

د(س) =− $س^3$

(0,0)

تمثـل العـدد بنقطة !

وهى قمم بإعداد درس – تمثيل الأعداد المركبة – كتبت عنوان الدرس : تمثيل العدد بنقطة ؛ فاعترضـــها قائلاً :

هو : كيف تمثلين العدد بنقطة ؟

هي : ماذا تقصد بسؤالك هذا ؟

هو : اقصد أن أقف معك على المفهوم الهندسي المجرد للنقطة فما هو ؟

هي : نحن نعرف النقطة كما يلي : إذا كان ل ، م مستقيمين متقاطعين فى المستوى فإن النقطة هي ذلك الشـــكل الهندسي الذي ينتمي إلى ل ، م فى آن واحد .

هو : جميل جداً .. هذا هو المفهوم المجرد للنقطة هندسيا حيث لا طول لها ولا عرض .. فهل تصلح النقطة بهـــذا المفهوم لتمثيل العدد ؟

هي : لا بالطبع .. لكن النقطـــة التي نمثـــل بها العدد غير تلك التي اتفقنا عليها الآن ؟

هو : أليست هذه نقطة وتلك نقطة .. فكيف تختلف عنها ؟

هي : إن النقطة التي نمثل بها عدداً ما سواء أكانت تنتمي للمستوى أم للفراغ فإنها تحدد بإحداثيات مثل النقطة م = (أ ، ب) مثلا فى فراغ ثنائي البعد .

هل تعرف ما الذي يعينه العددان أ ، ب بالضبط ؟

هو : هما إحداثيا النقطة فليتك توضحين ماذا تقصـــدين بلفظ العـــددين أ ، ب ؟

هي : إنهما معيارا قطعتين مستقيمتين موجهتين أولاهما تخرج من نقطة أصل المحورين فى اتجاه السينات ومعيارها = أ ويسمى الإحداثي السيني ... والقطعة الموجهة الأخرى تبدأ من نهاية الأولى وتكون عمودية عليها فى اتجاه محور الصادات (موازية له)

ومعيارها = | ب | ويسمى الإحداثي الصادي .

هو : إذن تقصدين أن معيـــار متجـــه الموضع الواصل بين أصل المحوريـــن (0 ، 0) والنقطة (أ ، ب) هـــو الذي يمثل العدد ؟

حيـــث أن الجمـــع الهندســـي لهاتين القطعـــتين يعطى هندســـيا متجـــه الموضع .

هي : نعم ومعياره = العدد .. وهنا أريد أن أؤكد على أن هناك تقابلا أحاديا بـــين مجموعـــة الأعـــداد عمومـــا ومجموعة نقط المستوى المحددة بالإحداثيات .. كما أن هناك تقابلاً أحاديا بين مجموعة الأعـــداد ومجموعـــة متجهات الموضع – وهى الخارجة من نقطة الأصل إلى النقطة – ومعيار كل متجه = العدد .

إنـهم يذبحون المنطق

في اختبار الرياضيات للصف الأول الثانوي وجـــد ســـؤالا في النسبة والتناسب هو :–

س : ضع (√) أمام العبارة الصحيحة ، (×) أمام العبارة الغير صحيحة ثم صوب العبارة الغير صحيحة

العدد +4 هو الوسط المتناسب بين 2،8

وحينما اطلع على نموذج الإجابة فوجئ بأن الإجابة هي (خطأ والتصويب الوسط المتناسب = ± **4**)

عرض الأمر عليها فاستغربت :–

هي : وماذا في هذا .. إنه فعلا ما تعلمناه وما قرره الكتاب المدرسي للصف الأول الثانوي ؟

هو : قرر ماذا ؟

هي : أن الوسط المتناسب بين العددين أ ، ب هو ± √أب بشرط أن

أ ، ب لهما نفس الإشارة ؟

هو : إذن لو قلت أن **4** هو الـــوسط بين **2،8** أكـــون مخطئا وأحصل على صفر ؟!

هي : نعم تكون مخطئا و أنصحك : قل العدد **4** وسط متناسب بين **2،8** ولا تقل الوسط المتناسب بينهما

هو : ألا تلمحين الرابط المنطقي بين العددين هنا وهو (أو) إنه يفصل ما بين العددين ولا يـــربط بينـــهما .إن الكتاب المدرسي برئ من هذا الفهم الخاطئ له

هي : كيف ..... وضح لي ؟

هو : احكمي بالصواب أو الخطأ على القضايا المنطقية الآتية ؟

العدد **4** أو العدد **–11** وسط متناسب بين **2،8**

العدد **–4** أو العدد **1250** وسط متناسب بين **2،8**

العدد **–4** أو العدد **+4** وسط متناسب بين **2،8**

إن القضايا الثلاث السابقة صحيحة وهي تربط بين قضيتين تكون المركبة منهما صـــحيحة إذا كـــان أحـــد طرفيها صائباً .

هي : اعتقد الآن أن ملاحظتك صائبة جدا لأننا حينما نكتب المتتابعة الهندسية هنا نكتبها كالآتي :–

2 ، +4 ، 8

أو **2 ، –4 ، 8**

والوسط المتناسب أو الوسط الهندسي للأولى هو **+4**

والوسط المتناسب أو الوسط الهندسي للثانية هو **–4**

ونحن لا نكتب المتتابعة هكذا **2 ، ±4 ، 8**

شكرا لك على تذكيري بهذا الرابط المنطقي (أو) .

الجذران التربيعيان
للعدد الحقيقي الموجب !!

سجل هذا العنـــوان في دفتر تحضيره فاعترضته هـــي قائلة

هي : بالله عليك كيف يكون للعدد الموجب جذران وماذا ستقول للطلاب وأنت تقدم لهم $\sqrt{\text{أ}^2} = |\text{أ}|$

هو : يا عزيزتي .. رياضيات الصف الثالث الإعدادي علمتنا هذا بل لقد أكدت علينا و ألحت وهى تعلمنا :

الجذر التربيعي الموجب للعدد أ = $+\sqrt{\text{أ}}$

والجذر التربيعي السالب للعدد أ = $-\sqrt{\text{أ}}$

أما إذ طلب منك الجذر التربيعي مبهماً فالإجابة = $\pm\sqrt{\text{أ}}$

هي : كتاب الصف الثالث أوقع بهذا الأسلوب معلماً في خطأ وهو يقدم للطالب هذا المفهوم فكتب على سبورته

$$\sqrt{25} = \sqrt{(+5)^2} = +5$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = -5$$

هو : هذا فهم خاطئ وتطبيق غير صحيح ... لأن

$$\sqrt{25} = |5| = |-5| = +5$$

لكن ماذا ستقولين للطلاب عند حل المعادلة س^2 = 25 ألا تعطين الحل س = $\pm\sqrt{25} = \pm 5$

هي : أرجو أن تراعي هنا أن + 5 ، −5 هما جـذران لكثـيرة الحدود د (س) = س^2 −25 وليسا جـذرين تربيعين للعدد 25 .

والمفروض أن نوجد جذري كثيرة الحدود كالتالي :−

س^2 − 25 = صفر

(س−5) (س+5) = صفر

إما س−5 =0 | أو س +5 =صفر

س = 5 | س =−5

م . ح = { −5 ، +5 }.

هو : شكرا جزيلاً لك ومن هنا نؤكد أنه للعدد الحقيقي الموجب لا يوجد غير جذر واحد حقيقي موجب .

مراجـــــع الكتـــاب
نقط الإضاءة

في الصفحات التالية لن نشير إلى تلك الكتب التي كانت ومازالت مسرحا لتلك الأخطاء الخطايا الـــتي أوردناها في هذا الكتاب لأننا ذكرنا معظمها عند تناول تلك الموضوعات .

لكننا سنحاول هنا الوقوف على هذه المراجع التي وجدنا في ثنايا صفحاتها نقط الإضاءة التي أنارت لنـــا سبل البحث والكتابة .

<u>الموضوع الأول :</u> هل هما حقاً عددان غير معروفين ؟!

المرجع الأول : الرياضيـــات للصف الثاني الثانوي بالمملكة العربية السعودية .

المؤلف : د .عبد الرحمن السلمان

د . محمد عبد الرحمن القويز

فى صـــ**10** .. تعريف العملية الثنائية

<u>المرجع الثاني</u> : مسائل في الرياضيات العالمية

المؤلـــف : ف مينورسكي

دار النشر : دار مير للطباعة والنشر

صـــ **272**: تحديد عدد حالات عدم التعيين

<u>الموضوع الثاني :</u> الضرب الإتجاهي وظهور ع المفاجئ!!

المرجـــــع **:** كتاب الميكانيكا الهندسية فرع الإستاتيكا

المؤلف : إعداد هيئة تدريس الميكانيكا .. كلية الهندسة .. جامعة الإسكندرية صـــ **318** ينظر تطبيق عزم متجه حول نقطة والضرب الإتجاهي .

<u>الموضوع الثالث :</u> التغير الطردى والتغير العكسي و م ﺩ ح

المرجـــع **:** مذكرة في الميكانيكا التطبيقية (جزء ثان)

تأليـــف **:** د. محمد زكى أبو النجا

دار النشر **:** المطبعة العلمية الحديثة بشبين الكوم صــ**96** في باب الحركة التوفيقية البسيطة وردت العبارة $f = -ks$ .. عجلة النقطة المادية f تتناسب عكسياً مع البعـــد s حيث k ثابت التناسب .

<u>الموضوع الرابع</u> : بحث زوجية أو فردية دالة

المرجع : حساب التفاضل والتكامل " سلسلة شوم "

المؤلف : فرانك ايزر

ترجمة : د . محمد أبو زيد

دار النشر : الدار الدولية للنشر والتوزيع .. مصر في صـــ **154** بحث التماثل

<u>الموضوع الخامس</u> : إنهم لا يراعون شروط التربيع

المرجع : الرياضيات للصف الثاني الثانوي الجزائري

تأليف : عبد القادر ساسي و آخرون

دار النشر : المعهد التربوي الوطني الحزائري

صـــ **50** :

$$\sqrt{\text{د}(\text{س})} = \text{هـ}(\text{س}) \iff \begin{cases} \text{د}(\text{س}) = [\text{هـ}(\text{س})]^2 \\ \text{هـ}(\text{س}) \leq \text{صفر} \end{cases}$$

<u>الموضوع السادس</u> : بحث قابلية الاشتقاق لا يجوز !

المرجع : كتاب التفاضل والتكامل

تأليف : د . السيد محمد الغزي و د . سعد محمد عبد الله

دار النشر : مطابع مجموعة شركات الهلال – مصر الجديدة

صـــ **77** : في دراسة قابلية الاشتقاق

المرجع الثاني : مسائل في الرياضيات العالية

تأليف :

دار النشر : دار " مير " الدالة المتصلة للتفاضل

<u>الموضوع السابع</u> : الفصل بين الجبر والتفاضل

المرجع : التوابع التحليلية

تأليف : د . محمد عادل سودان

دار النشر : مؤسسة الرسالة

صـــ **100** : النهايات

<u>الموضوع الثامن</u> : دً (س) وماذا تعني هندسيا للمنحني ؟

المرجع : التفاضل والتكامل

تأليف : د . محمد الغزي و د . محمد عبد الله

دار النشر : مطابع مجموعة شركات الهلال .

صـــ **180** : تقعر الدالة وعلاقته بالمشتقة الأولى والثانية

<u>الموضوع التاسع</u> : تمثيل العدد بنقطة

المرجع : الأسس المعاصرة للهندسة التحليلية

تأليف : د . خضر حامد الأحمر

دار النشر : مؤسسة الرسالة بيروت

صـــ 20 : مجموعة الأعداد الحقيقية R والفراغ الإحداثي

<u>الموضوع العاشر</u> : انهم يذبحون المنطق

المرجع : نفس المرجع السابق

تأليف : د . خضر حامد الأحمر

دار النشر : مؤسسة الرسالة بيروت

<u>الموضوع الحادي عشر</u> : الجذران التربيعيان للعدد الحقيقي !

يراجع في كل كتب الرياضيات مفهوم أ^2 = | أ | 

السيرة الذاتية للكاتب أحمد مرسال

الاسم : أحمد إسماعيل مرسال.
التخصص الأدبي : شاعر ، كاتب مسرحي ، باحث ، ومعد برامج بالإذاعة والتليفزيون.
المؤهل : بكالوريوس علوم وتربية مايو 1977
الوظيفة والعمل : أخصائي أول رياضيات (ثانوي).
مكان العمل : مدرسة قويسنا الثانوية بنات.
الجنسية : مصري.
الميلاد : 1 \ 4 \ 1955
مكان الميلاد : قرية شرانيس - مركز قويسنا - المنوفية.
تليفون : منزل 575958 \ 048 -- عمل 573501 \ 048

الإنتاج الأدبي
1- ديوان فصحى \ أغنيات على جراح فيروز 1985م.
2- ديوان فصحى \ هوامش على دفاتر النساء 2000م.
3- ديوان فصحى وعامية\ قصائد مسروقة من عيون البنات 2001م.

قصائد نشرت له
1- أردت ولكن (مجلة الفيصل السعودية).
2- رسالة إلى ياسر عرفات + صرخة فى يوم الذكرى في كتاب " الشعر العربي المعاصر إلى أين " - تأليف د. مصطفى هدارة.
3- الكلمة (جريدة المساء المصرية).
4- حصار (جريدة الجمهورية الجزائرية).
5- استاكوزا (جريدة الشعب المصرية وكتاب تجليات الطمي) .
أذيعت قصائده فى إذاعة البرنامج العام المصري وإذاعة الشعب المصري (قبل إلغائها) وبإذاعة وسط الدلتا.

إنتاج إذاعي وتليفزيوني
1- إعداد برامج :
حلم امرأة
البرلمان الصغير
قال الراوي
بإذاعة وسط الدلتا بمصر .
2- المشاركة كضيف (محاضر) فى القناة السادسة فى برامج :
الصالون الثقافي
قطوف

العمل الأدبي الأول
النادى الثقافي.

الإنتاج العلمي

1- الخطايا العشر فى رياضيات ما قبل الجامعة.

2- تحت الطبع

(أراجوزات وبهلونات يغنون الإحصاء والرياضيات).

أعمال أخرى

1- عضو لجنة قراءات وتصحيح الأعمال الإبداعية بثقافة المنوفية.